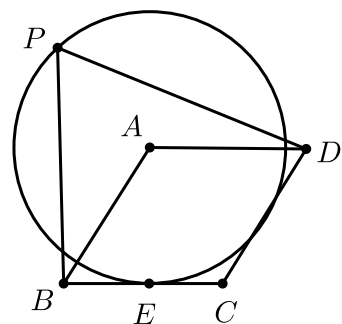


别慌，小场面

1. 如图，菱形 $ABCD$ 的边长为2，锐角大小为 60° ， $\odot A$ 与 BC 相切于点 E ，在 $\odot A$ 上任取一点 P ，则 $PB + \frac{\sqrt{3}}{2}PD$ 的最小值为 _____ .

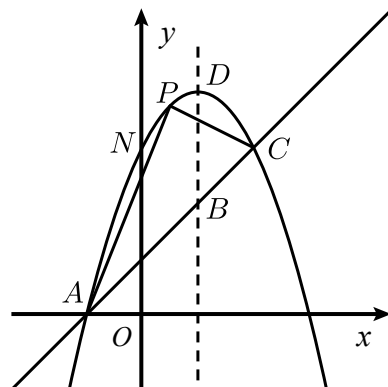


【答案】 $\frac{\sqrt{37}}{2}$

【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】与圆有关的动点、轨迹问题；切线的性质定理

2. 如图，抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 与一直线相交于 $A(-1, 0)$ ， $C(2, 3)$ 两点，与 y 轴交于点 N ，其顶点为 D .



- (1) 求抛物线及直线 AC 的函数表达式 .
- (2) 如图，点 P 为抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 上任意一点且处于 AC 上方，求三角形 PAC 面积的最大值 .
- (3) 设点 $M(3, m)$ ，求使 $MN + MD$ 的值最小时 m 的值 .

【答案】 (1) $y = -x^2 + 2x + 3$, $y = x + 1$.

(2) $\frac{27}{8}$.

(3) $\frac{18}{5}$.

【解析】(1) $\therefore$ 将点A和点C的坐标代入抛物线的解析式得： $\begin{cases} -1 - b + c = 0 \\ -4 + 2b + c = 3 \end{cases}$

解得： $b = 2, c = 3$,

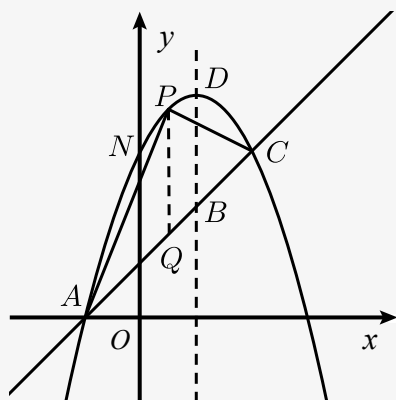
$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -x^2 + 2x + 3$,

设直线AC的解析式为 $y = kx + b$,

$\therefore$ 将点A和点C的坐标代入得 $\begin{cases} -k + b = 0 \\ 2k + b = 3 \end{cases}$, 解得 $k = 1, b = 1$,

$\therefore$ 直线AC的解析式为 $y = x + 1$.

(2) 如图,



设点 $P(m, -m^2 + 2m + 3)$,

$\therefore Q(m, m + 1)$,

$$\begin{aligned} \therefore PQ &= (-m^2 + 2m + 3) - (m + 1) \\ &= -m^2 + m + 2 = -\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore S_{\triangle APC} &= \frac{1}{2} PQ \times |x_C - x_A| \\ &= \frac{1}{2} \left[-\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \right] \times 3 = -\frac{3}{2} \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{27}{8}, \\ \therefore \text{当 } m = \frac{1}{2} \text{ 时, } S_{\triangle APC} \text{ 最大} &= \frac{27}{8}, y = -m^2 + 2m + 3 = \frac{15}{4}, \\ \therefore P\left(\frac{1}{2}, \frac{15}{4}\right). \end{aligned}$$

(3) 如图1所示,

过点N与直线 $x = 3$ 的对称点 N' , 连接 DN' , 交直线 $x = 3$ 与点M,

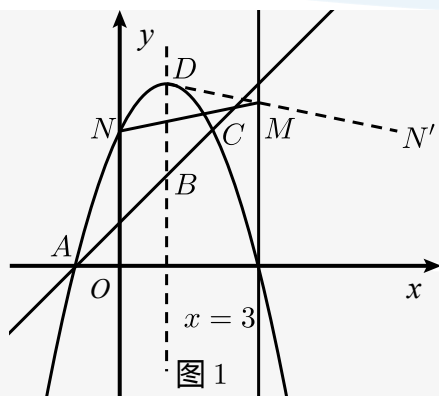


图 1

$\therefore$ 当 $x = 0$ 时 $y = 3$,

$\therefore N(0, 3)$,

$\therefore$ 点 N 与点 N' 关于 $x = 3$ 对称,

$\therefore N'(6, 3)$,

$\therefore y = -x^2 + 2x + 3 = -(x - 1)^2 + 4$,

$\therefore D(1, 4)$,

设 DN 的解析式为 $y = kx + b$,

将点 N' 与点 D 的坐标代入得:
$$\begin{cases} 6k + b = 3 \\ k + b = 4 \end{cases}$$

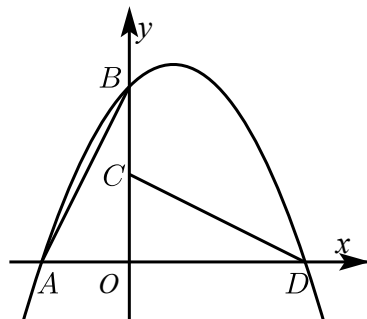
解得: $k = -\frac{1}{5}$, $b = \frac{21}{5}$,

$\therefore$ 直线 DN' 的解析式为 $y = -\frac{1}{5}x + \frac{21}{5}$,

当 $x = 3$ 时, $m = -\frac{3}{5} + \frac{21}{5} = \frac{18}{5}$.

【标注】【知识点】二次函数与平行四边形

3. 如图所示, 在平面直角坐标系中, $\text{Rt}\triangle AOB$ 的顶点坐标分别为 $A(-2, 0)$, $O(0, 0)$, $B(0, 4)$, 把 $\text{Rt}\triangle AOB$ 绕点 O 按顺时针方向旋转 90° , 得到 $\triangle COD$.



- (1) 求 C 、 D 两点的坐标.
- (2) 求经过 A 、 B 、 D 三点的抛物线的解析式.
- (3) 在(2)中抛物线的对称轴上取两点 E 、 F (点 E 在点 F 的上方), 且 $EF = 1$, 使四边形 $ACEF$ 的周长最小, 求出 E 、 F 两点的坐标.

【答案】(1) C 点的坐标是 $(0, 2)$, D 点的坐标是 $(4, 0)$.

(2) $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$.

(3) 点 E 的坐标为 $(1, \frac{7}{4})$, 点 F 的坐标为 $(1, \frac{3}{4})$.

【解析】(1) 由旋转的性质可以知道: $OC = OA = 2$, $OD = OB = 4$,

$\therefore C$ 点的坐标是 $(0, 2)$, D 点的坐标是 $(4, 0)$.

(2) 设所求抛物线的解析式为 $y = ax^2 + bx + c$,

根据题意, 得
$$\begin{cases} 4a - 2b + c = 0 \\ c = 4 \\ 16a + 4b + c = 0 \end{cases},$$

计算得出 $a = -\frac{1}{2}$, $b = 1$, $c = 4$,

$\therefore$ 所求抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$.

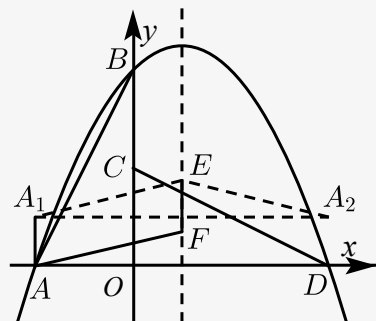
(3) 只需求 $AF + CE$ 最短,

抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$ 的对称轴为 $x = 1$,

将点 A 向上平移至 $A_1(-2, 1)$, 则 $AF = A_1E$,

作 A_1 关于对称轴 $x = 1$ 的对称点 $A_2(4, 1)$,

连接 A_2C , A_2C 与对称轴交于点 E , F 为所求,



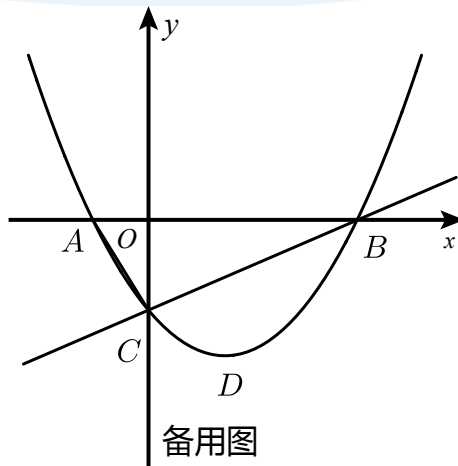
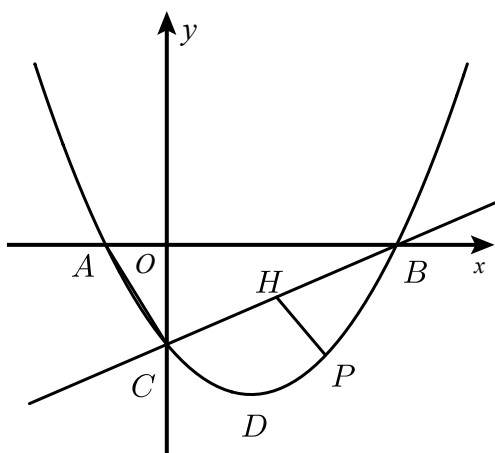
可求得 A_2C 的解析式为 $y = -\frac{1}{4}x + 2$,

当 $x = 1$ 时, $y = \frac{7}{4}$,

$\therefore$ 点 E 的坐标为 $(1, \frac{7}{4})$, 点 F 的坐标为 $(1, \frac{3}{4})$.

【标注】【知识点】二次函数与轴对称问题

4. 已知在平面直角坐标系中, 抛物线 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}$ 与 x 轴交于 A, B 两点(点 A 在点 B 左侧), 与 y 轴交于点 C , 顶点为 D .



- (1) 如图, 直线 BC 下方抛物线上的一个动点 P (不与点 B, C 重合), 过点 P 作 $PH \perp BC$ 于点 H , 当 PH 最大时, 点 E 为线段 BC 一点(不与点 B, C 重合), 当 $PE + \frac{\sqrt{3}}{2}BE$ 的值最小时, 求点 E 的坐标.

【答案】 (1) 见解析

【解析】 (1) 解: 令 $y = 0$, 即 $\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3} = 0$,

$$\text{解得 } x_1 = -1, x_2 = 3,$$

$$\therefore A(-1, 0), B(3, 0).$$

$$\text{令 } x = 0, \text{ 得 } y = -\sqrt{3},$$

$$\therefore C(0, -\sqrt{3}).$$

$$\text{设直线 } BC \text{ 的解析式为 } y = kx + b,$$

$$\therefore \begin{cases} 3k + b = 0 \\ b = -\sqrt{3} \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} k = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ b = -\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\therefore \text{直线 } BC: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}.$$

$$\text{设过点 } P \text{ 且平行于 } BC \text{ 的直线解析式为 } y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + m.$$

$$\text{当 } y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + m \text{ 与 } y = \frac{\sqrt{3}}{3}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3} \text{ 只有一个交点时, } PH \text{ 的值最}$$

$$\text{大, 由 } \frac{\sqrt{3}}{3}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}x + m,$$

$$\text{得 } \frac{\sqrt{3}}{3}x^2 - \sqrt{3}x - \sqrt{3} - m = 0, \text{ 此方程有两个相等的实数根,}$$

$$\therefore x = -\frac{-\sqrt{3}}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{2},$$

$$\text{此时 } y = -\frac{5\sqrt{3}}{4},$$

$$\therefore P\left(\frac{3}{2}, -\frac{5\sqrt{3}}{4}\right).$$

如图1, 将 BC 沿 x 轴翻折交 y 轴于点 S , 作 $EG \perp BS$ 于点 G , $PK \perp BS$ 于点 K .

$$\begin{aligned}
&\because \tan \angle CBO = \frac{CO}{BO} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \\
&\therefore \angle COB = 30^\circ, \\
&\therefore \angle SBO = \angle CBO = 30^\circ, \\
&\therefore \angle CBS = 60^\circ, \\
&\therefore EG = BE \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} BE, \\
&\therefore PE + \frac{\sqrt{3}}{2} BE = PE + EG, \\
&\therefore \text{当 } P, E, G \text{ 共线时, } PE + \frac{\sqrt{3}}{2} BE \text{ 的值最小, 即为 } PK \text{ 的值} \\
&\because B(3, 0), S(0, \sqrt{3}), \\
&\therefore \text{直线 } BS: y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}. \\
&\because PK \perp BS, \\
&\therefore \text{设直线 } PK: y = \sqrt{3}x + n. \\
&\because P\left(\frac{3}{2}, -\frac{5\sqrt{3}}{4}\right), \\
&\therefore \sqrt{3} \times \frac{3}{2} + n = -\frac{5\sqrt{3}}{4}, \\
&\therefore n = -\frac{11\sqrt{3}}{4}, \\
&\therefore \text{直线 } PK: y = \sqrt{3}x - \frac{11\sqrt{3}}{4}. \\
&\text{由 } y = \sqrt{3}x - \frac{11\sqrt{3}}{4} \text{ 和 } y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}, \\
&\text{解得 } \begin{cases} x = \frac{21}{8} \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{8} \end{cases} \\
&\therefore E\left(\frac{21}{8}, -\frac{\sqrt{3}}{8}\right).
\end{aligned}$$

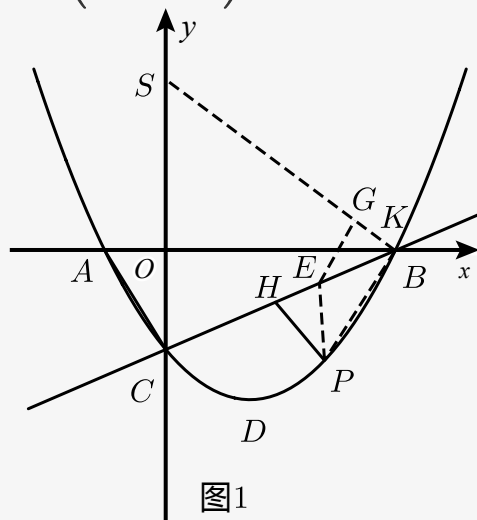
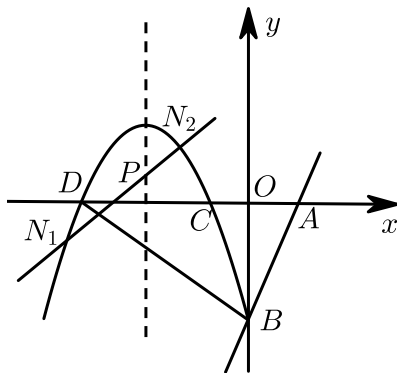


图1

【标注】【知识点】二次函数与等腰三角形结合

5. 如图所示, 直线 $l: y = 3x - 3$ 与 x 轴交于点 A , 与 y 轴交于点 B , 把 $\triangle AOB$ 沿 y 轴翻折, 点 A 落到点 C , 抛物线过点 B, C 和 $D(3, 0)$.



- (1) 求直线 BD 和抛物线的解析式.
- (2) 若点 $P\left(-2, \frac{3}{4}\right)$ 是对称轴上一点, 过点 P 的任一条与 y 轴不平行的直线与抛物线交于两点 N_1, N_2 , 说明 $\frac{N_1P \cdot N_2P}{N_1N_2}$ 是否是定值? 若是定值, 请求出这个定值, 若不是, 请说明理由.

【答案】 (1) 直线 BD 的解析式为 $y = -x - 3$, 抛物线的解析式为 $y = -x^2 - 4x - 3$.

(2) 是定值, 定值为 $\frac{1}{4}$.

【解析】 (1) $\because y = 3x - 3$ 与 x 轴交于点 A , 与 y 轴交于点 B ,

$\therefore A(1, 0), B(0, -3)$, 设直线 BD 的解析式为 $y = kx + b$,

把 B, D 两点坐标代入, $\begin{cases} -3k + b = 0 \\ b = -3 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} k = -1 \\ b = -3 \end{cases}$,

$\therefore$ 直线 BD 的解析式为 $y = -x - 3$,

$\because$ 抛物线经过点 $D(-3, 0)C(-1, 0)$,

设抛物线的解析式为 $y = a(x + 1)(x + 3)$,

把点 $B(0, -3)$ 代入得 $a = -1$,

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -x^2 - 4x - 3$.

(2) 理由:

设过点 $P(-2, \frac{3}{4})$ 的直线为 $y = kx + b$,

则 $\frac{3}{4} = -2k + b, N_1(x_1, y_1), N_2(x_2, y_2)$,

$\therefore b = \frac{3}{4} + 2k$,

$\therefore$ 过点 P 的直线为 $y = kx + 2k + \frac{3}{4}$,

由 $\begin{cases} y = kx + 2k + \frac{3}{4} \\ y = -x^2 - 4x - 3 \end{cases}$, 得到 $x^2 + (k + 4)x + 2k + \frac{15}{4} = 0$,

$\therefore x_1 + x_2 = -k - 4, x_1x_2 = 2k + \frac{15}{4}$,

$\therefore y_1 = kx_1 + 2k + \frac{3}{4}, y_2 = kx_2 + 2k + \frac{3}{4}$,

$$\therefore y_1 - y_2 = k(x_1 - x_2) ,$$

$\therefore$

$$N_1 N_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{1 + k^2} \cdot \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{1 + k^2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = 1 + k^2$$

,

又 $\therefore$

$$N_1 P = \sqrt{(x_1 + 2)^2 + (y_1 - \frac{3}{4})^2} = \sqrt{(x_1 + 2)^2 + (kx_1 + 2k)^2} = \sqrt{1 + k^2} \cdot \sqrt{(x_1 + 2)^2}$$

,

$$\text{同理可得 } N_2 P = \sqrt{1 + k^2} \cdot \sqrt{(x_2 + 2)^2} ,$$

$\therefore$

$$N_1 P \cdot N_2 P = (1 + k^2) \sqrt{(x_1 + 2)^2 (x_2 + 2)^2} = (1 + k^2) \sqrt{\left(2k + \frac{15}{4} - 2k - 8 + 4\right)} = \frac{1}{4} (1 + k^2)$$

,

$$\therefore \frac{N_1 P \cdot N_2 P}{N_1 N_2} = \frac{1}{4} .$$

【标注】【知识点】二次函数与动点问题